

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA A DO ENSINO  
SECUNDÁRIO

(CÓDIGO DA PROVA 635) – 1ª FASE – 25 DE JUNHO 2018

CADERNO 1

1.

1. 1. **P2001/2002**

Seja  $X$  a variável aleatória: “Número de vezes que sai a face numerada com o número 3”.

$X$  segue uma distribuição binomial com 10 provas repetidas e probabilidade de sucesso  $\frac{1}{4}$ .

Assim,  $n = 10$ ,  $p = \frac{1}{4}$  e consequentemente a probabilidade de insucesso é  $q = \frac{3}{4}$ , pelo que:

$$P(X = 6) = {}^{10}C_6 \left(\frac{1}{4}\right)^6 \times \left(\frac{3}{4}\right)^4 \approx 0,016.$$

A resposta correta é a opção **(B)**.

1. 2. **PMC2015**

Como  $f$  é diferenciável no intervalo  $[0, 2]$ , logo pelo Teorema de Lagrange temos

$$\exists c \in ]0, 2[ : f'(c) = t.m.v._{[0, 2]}, \text{ ou seja, } \exists c \in ]0, 2[ : f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0}.$$

Como por hipótese  $f(0) = 1$ , então  $\exists c \in ]0, 2[ : f'(c) = \frac{f(2) - 1}{2}$ .

Pelo facto de, por hipótese,  $\forall x \in [0, 2] : 0 < f'(x) < 9$ , temos em particular que:  $0 < f'(c) < 9$ ,

$$\text{ou seja, } 0 < \frac{f(2) - 1}{2} < 9 \Leftrightarrow 0 < f(2) - 1 < 18 \Leftrightarrow 1 < f(2) < 19.$$

A resposta correta é a opção **(B)**.

2.

2.1.

As bases do prisma são hexágonos regulares, pelo que a amplitude dos seus ângulos internos é  $120^\circ$ . Assim, como  $\overline{PQ} = 4$ , vem que  $\overline{QR} = 4$  e portanto:

$$\overline{QP} \cdot \overline{QR} = \|\overline{QP}\| \times \|\overline{QR}\| \times \cos(\widehat{PQR}) = \overline{PQ} \times \overline{QR} \times \cos(120^\circ) = 4 \times 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{16}{2} = -8.$$

2.2.

Dado que as faces laterais do prisma são retângulos, então a sua área lateral é dada por:

$$6 \times \overline{PQ} \times \overline{PS} = 6 \times 4 \times \overline{PS} = 24 \overline{PS}.$$

Um vetor normal ao plano  $PQR: 2x + 3y - z - 15 = 0$  é  $\vec{n}(2, 3, -1)$  e como a reta  $PS$  é perpendicular ao plano  $PQR$ , então um vetor diretor da reta  $PS$  é  $\vec{n}$  e portanto:

$$PS: (x, y, z) = (14, 5, 0) + k(2, 3, -1), k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 14 + 2k \\ y = 5 + 3k \\ z = -k \end{cases}, k \in \mathbb{R}.$$

Como o ponto  $P$  pertence à reta  $PS$  as suas coordenadas são da forma  $(14 + 2k, 5 + 3k, -k), k \in \mathbb{R}$ .

Além disso, como  $P$  também pertence ao plano  $PQS$  e substituindo as suas coordenadas na equação deste, vem:

$$\begin{aligned} 2(14 + 2k) + 3(5 + 3k) - (-k) - 15 &= 0 \Leftrightarrow 28 + 4k + 15 + 9k + k - 15 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 14k = -28 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow k = -2 \end{aligned}$$

Logo, as coordenadas de  $P$  são:  $(14 + 2 \times (-2), 5 + 3 \times (-2), -(-2)) = (10, -1, 2)$ .

Assim, temos  $\overline{PS} = \sqrt{(10 - 14)^2 + (-1 - 5)^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{16 + 36 + 4} = \sqrt{56}$ , pelo que a medida da área lateral do prisma é dada por:  $24 \overline{PS} = 24 \times \sqrt{56}$ . De onde se conclui que a área lateral do prisma é, aproximadamente, 179,6.

2.3.

O número de casos possíveis é  ${}^6C_2 \times {}^6C_2$ . Escolhem-se dois vértices de uma das bases do prisma. O número de maneiras de o fazer é  ${}^6C_2$ . Para cada uma destas maneiras, existem  ${}^6C_2$  maneiras distintas de escolher dois vértices da outra base do prisma.

O número de casos favoráveis é 6. Cada uma das seis faces do prisma tem exatamente quatro vértices, sendo que exatamente dois pertencem a uma das bases e os outros dois pertencem à outra base.

Assim, pela Lei de Laplace, a probabilidade pedida é:  $\frac{6}{{}^6C_2 \times {}^6C_2} = \frac{2}{75} \approx 0,03$ .

### 3.

#### 3.1.

Os doze alunos vão dispor-se lado a lado em linha reta para tirar uma fotografia.

Há 4! formas diferentes de os alunos de Espanhol se disporem juntos lado a lado.

Há 8! formas diferentes de os alunos de Inglês se disporem juntos lado a lado.

Há 2 maneiras diferentes de estes grupos de alunos se disporem lado a lado. O grupo de alunos de Espanhol à esquerda e o grupo de Inglês à direita ou vice-versa.

Assim, o número pedido é dado por:  $2 \times 4! \times 8! = 1\,935\,360$ .

A resposta correta é a opção (D).

#### 3.2.

Designemos o acontecimento “o aluno escolhido estuda Espanhol” por  $E$  e o acontecimento “o aluno escolhido estuda Inglês” por  $I$ .

Sabemos que:

- $P(E) = P(I)$ , pois o número de alunos que estuda Espanhol é igual ao número de alunos que estuda Inglês. (1)
- $P(E \cup I) = 4 \times P(E \cap I)$ , pois o número de alunos que estudam pelo menos uma das duas línguas é o quádruplo do número de alunos que estudam as duas línguas. (2)

Pretende-se determinar a probabilidade de esse aluno estudar Inglês, sabendo que estuda Espanhol, ou seja,  $P(I|E)$ .

Como  $P(E \cup I) = P(E) + P(I) - P(E \cap I)$  e tendo em conta (1) e (2), temos:

$$\begin{aligned} 4 \times P(E \cap I) &= P(E) + P(I) - P(E \cap I) \Leftrightarrow 5 \times P(E \cap I) = P(E) + P(I) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 5 P(E \cap I) = 2P(E) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow P(E \cap I) = \frac{2}{5} P(E) \end{aligned}$$

$$\text{Assim, } P(I|E) = \frac{P(E \cap I)}{P(E)} = \frac{\frac{2}{5} \times P(E)}{P(E)} = \frac{2}{5} = 0,4, \text{ ou seja, } 40\%.$$

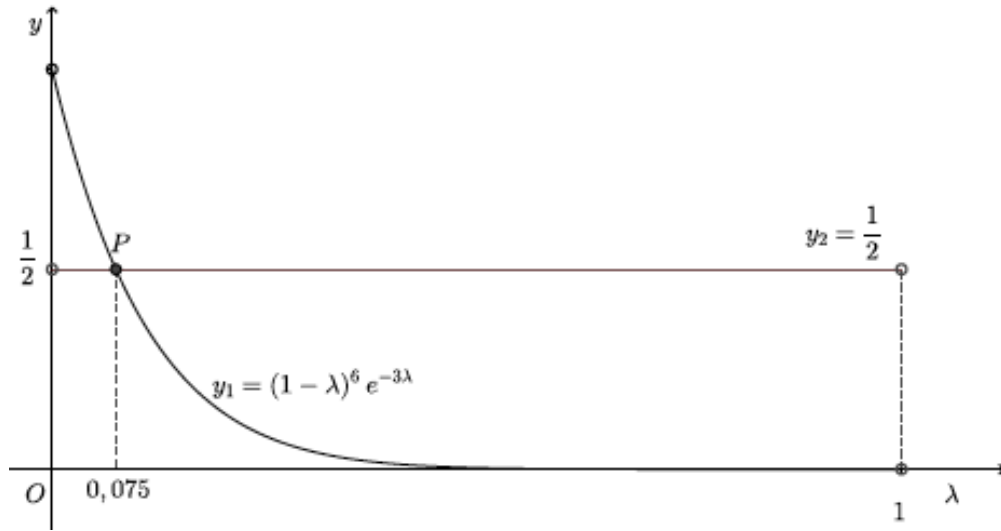
Logo, a probabilidade pedida é: 40%.

4.

Dado que  $R = \lambda$  e  $L = \frac{I}{2}$  e como  $L = I(1 - R)^6 e^{-3\lambda}$ , então temos que

$$\frac{I}{2} = I(1 - \lambda)^6 e^{-3\lambda} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = (1 - \lambda)^6 e^{-3\lambda}.$$

Recorrendo às capacidades da calculadora gráfica, representamos, numa janela adequada, a curva correspondente a  $y_1 = (1 - \lambda)^6 e^{-3\lambda}$  e a reta de equação  $y_2 = \frac{1}{2}$ .



Usando a função da calculadora gráfica para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de intersecção dos dois gráficos, obtemos um valor aproximado (às milésimas) da abcissa do ponto  $P$ :  $x_P \approx 0,075$ .

5.

Pretende-se determinar o valor de  $x \in \left] 0, \frac{\pi}{12} \right[$  para o qual o número complexo

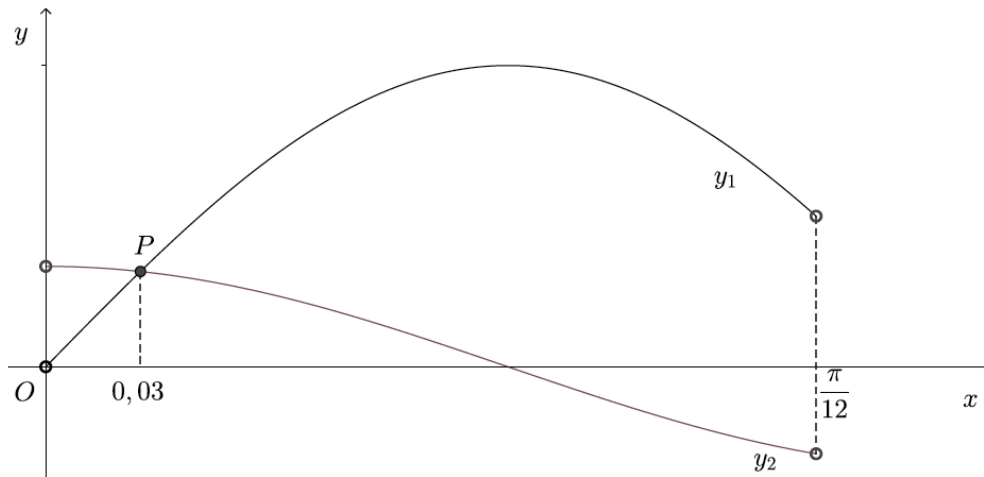
$$z = (\cos x + i \operatorname{sen} x)^{10} \text{ verifica a condição } \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{3} \operatorname{Re}(z).$$

Na forma trigonométrica temos  $z = (e^{ix})^{10}$  e aplicando a fórmula de Moivre temos  $z = e^{i(10x)}$ ,

ou seja,  $z = \cos(10x) + i \operatorname{sen}(10x)$ .

$$\text{Assim, } \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{3} \operatorname{Re}(z) \Leftrightarrow \operatorname{sen}(10x) = \frac{1}{3} \cos(10x).$$

Recorrendo às capacidades da calculadora gráfica, representamos, numa janela adequada, as curvas correspondentes a  $y_1 = \sin(10x)$  e a  $y_2 = \frac{1}{3} \cos(10x)$ .



Usando a função da calculadora gráfica para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de intersecção dos dois gráficos, obtemos um valor aproximado (às centésimas) da abcissa do ponto  $P$ :  $x_P \approx 0,03$ .

A resposta correta é a opção ( **B** ).

6.

Como  $a$ ,  $a + 6$  e  $a + 18$  são três termos consecutivos de uma progressão geométrica tem-se

$$\frac{a + 6}{a} = \frac{a + 18}{a + 6}, \text{ com } a \neq 0 \text{ e } a \neq -6, \text{ sendo } \frac{a + 6}{a} \text{ a razão, } r, \text{ da progressão.}$$

Sendo  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, -6\}$ , vem:

$$\frac{a + 6}{a} = \frac{a + 18}{a + 6} \Leftrightarrow (a + 6)^2 = a(a + 18) \Leftrightarrow a^2 + 12a + 36 = a^2 + 18a \Leftrightarrow 6a = 36 \Leftrightarrow a = 6.$$

$$\text{Então, } r = \frac{6 + 6}{6} = 2.$$

Seja  $(u_n)$  essa progressão.

Como a soma dos sete primeiros termos da progressão geométrica é igual a 381 vem:

$$u_1 \times \frac{1 - 2^7}{1 - 2} = 381 \Leftrightarrow 127u_1 = 381 \Leftrightarrow u_1 = \frac{381}{127} \Leftrightarrow u_1 = 3.$$

7.

Sendo o ponto  $O$  o centro e o ponto  $A$  de abcissa 2, então o raio da circunferência é 2.

Assim, a condição que define o círculo é dada por:  $x^2 + y^2 \leq 4$ .

Como os pontos  $B$  e  $F$  têm abcissa 1, os simétricos em relação ao eixo  $Oy$ ,  $C$  e  $E$ , têm abcissa  $-1$ .

O semiplano fechado à direita da reta  $BF$  reunido com o semiplano fechado à esquerda da reta  $CE$  é descrito por  $|x| \geq 1$ .

A resposta correta é a opção ( **C** ).

## CADERNO 2

8.

8.1. **P2001/2002**

Tendo em conta que  $(2, -1, 0)$  são as coordenadas de um vetor diretor da reta  $r$  e que qualquer vetor diretor da reta é colinear com este vetor, então podemos eliminar as opções (B) e (C).

Além disso, o ponto  $(-1, 2, 0)$  não pertence à reta  $r$ , pois qualquer ponto da reta tem cota igual a 3. Podemos, assim, eliminar a opção (D).

Logo, a resposta correta é a opção (A).

Note-se que o ponto  $(3, 0, 3)$  pertence à reta, pois  $\frac{3+1}{2} = \frac{0-2}{-1} \wedge 3 = 3$ .

8.2. **PMC2015**

Sabe-se que  $\arcsen(1) = \frac{\pi}{2}$ , pois a função  $\arcsen x$  está definida em  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  e pretende-se descobrir a amplitude do ângulo  $\alpha$  tal que  $\sen \alpha = 1$ .

Além disso,  $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{3}$ , pois a função  $\arccos x$  está definida em  $[0, \pi]$  e, da mesma

forma que o anterior, pretende-se descobrir o ângulo  $\beta$  tal que  $\cos \beta = -\frac{1}{2}$ .

Logo,  $\arcsen(1) + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{6}$ .

A resposta correta é a opção (A).

9.

Comecemos por simplificar  $w$ ,

$$w = 1 + \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{3}i^5}{1 + 2i} = 1 + \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{3}i}{1 + 2i} \times \frac{1 - 2i}{1 - 2i} = 1 + \frac{2\sqrt{3} - 4\sqrt{3}i - \sqrt{3}i + 2\sqrt{3}i^2}{1^2 - (2i)^2} =$$

$$= 1 + \frac{2\sqrt{3} - 5\sqrt{3}i - 2\sqrt{3}}{1 - 4i^2} = 1 - \frac{5\sqrt{3}i}{5} = 1 - \sqrt{3}i$$

Escrevendo  $w$  na forma trigonométrica, temos que  $1 - \sqrt{3}i = re^{i\theta}$ , onde:

- $r = |1 - \sqrt{3}i| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$
- $\operatorname{tg} \theta = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$ , como o afixo de  $1 - \sqrt{3}i$  pertence ao 4º Q.,  $\theta$  pertence ao 4º Q.. Logo,  
 $\theta = -\frac{\pi}{3}$  (argumento principal).

Assim,  $w = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$ .

Como  $w$  é uma raiz quarta de  $z$ , as restantes raízes quartas de  $z$  são:

$$2e^{i\left(-\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{4}\right)} = 2e^{i\frac{\pi}{6}}; \quad 2e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{4}\right)} = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} \quad \text{e} \quad 2e^{i\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{4}\right)} = 2e^{i\frac{7\pi}{6}}$$

Como se pretende a raiz quarta de  $z$  cujo afixo pertence ao primeiro quadrante, o número complexo pedido é  $2e^{i\frac{\pi}{6}}$ .

10.

10.1. **P2001/2002**

Recorrendo a uma tabela de dupla entrada tem-se:

×	0	1	2	3
0		0	0	0
1	0		2	3
2	0	2		6
3	0	3	6	

Assim, tem-se que  $X = \{0, 2, 3, 6\}$  e  $P(X=0) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ ,  $P(X=2) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ ,

$P(X=3) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$  e  $P(X=6) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ , pelo que  $k=0$ .

A resposta correta é a opção **(D)**.

**10.2. PMC2015**

$$\lim(u_n) = \lim\left(\frac{n+k}{n}\right)^n = \lim\left(\frac{n}{n} + \frac{k}{n}\right)^n = \lim\left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = e^k.$$

Como o limite da sucessão  $(u_n)$  é solução da equação  $\ln\left(\frac{x}{e}\right) = 3$  temos:

$$\ln\left(\frac{e^k}{e}\right) = 3 \Leftrightarrow \ln(e^{k-1}) = 3 \Leftrightarrow k-1 = 3 \Leftrightarrow k = 4$$

A resposta correta é a opção **(D)**.

**11.**

Começemos por exprimir  $b$  em função de  $a$  :

$$\ln b = 4 \ln a \Leftrightarrow \ln b = \ln(a^4) \Leftrightarrow b = a^4.$$

Assim, temos:

$$a^x \geq b^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow a^x \geq (a^4)^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow a^x \geq a^{\frac{4}{x}}, \text{ como } a > 1 \text{ a função exponencial é crescente, logo:}$$

$$x \geq \frac{4}{x} \Leftrightarrow x - \frac{4}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4}{x} \geq 0$$

Calculando os zeros do numerador e do denominador da fração  $\frac{x^2 - 4}{x}$  e estudando a variação do sinal temos:

$x$	$-\infty$	$-2$		$0$		$2$	$+\infty$
$x^2 - 4$	$+$	$0$	$-$	$-$	$-$	$0$	$+$
$x$	$-$	$-$	$-$	$0$	$+$	$+$	$+$
$\frac{x^2 - 4}{x}$	$-$	$0$	$+$	n.d.	$-$	$0$	$+$

Conclui-se que o conjunto solução da condição  $\frac{x^2 - 4}{x} \geq 0$  é  $[-2, 0[ \cup [2, +\infty[$ .

12.

12.1.

Para obtermos os zeros da função  $g$  em  $\mathbb{R}^-$ , igualamos a zero o primeiro ramo da função:

$$\frac{e^{2x} - 1}{4x} = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 1 = 0 \wedge 4x \neq 0 \Leftrightarrow e^{2x} = 1 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x = 0 \wedge x \neq 0.$$

Concluimos que, a função  $g$  em  $\mathbb{R}^-$ , não tem zeros.

Em  $[0, \pi]$ , consideramos o segundo ramo:

$$\frac{1}{2 - \sin(2x)} = 0 \Leftrightarrow 1 = 0 \wedge 2 - \sin(2x) \neq 0. \text{ Concluimos que, a função } g \text{ no intervalo } [0, \pi],$$

não tem zeros.

Logo, não tem zeros no seu domínio.

A resposta correta é a opção (A).

12.2.

Para averiguar se a função  $g$  é contínua em  $x=0$ , temos que verificar se

$$g(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x).$$

$$\bullet \quad g(0) = \frac{1}{2 - \sin 0} = \frac{1}{2 - 0} = \frac{1}{2};$$

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \frac{1}{2 - \sin 0} = \frac{1}{2 - 0} = \frac{1}{2};$$

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x} - 1}{4x} = \frac{1}{2} \left( \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x} - 1}{2x} \right) = \frac{0}{0} \text{ (indeterminação).}$$

(fazendo  $y = 2x$ , temos que se  $x \rightarrow 0^-$ , então  $y \rightarrow 0^-$ )

$$\frac{1}{2} \left( \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{e^y - 1}{y}}_{\text{limite notável}} \right) = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$

Como  $g(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \frac{1}{2}$ , então a função  $g$  é contínua em  $x=0$ .

### 12.3.

Começemos por determinar a expressão da derivada da função  $g$  em  $]0, \pi]$ :

$$g'(x) = \left( \frac{1}{2 - \sin(2x)} \right)' = \frac{1' \times (2 - \sin(2x)) - 1 \times (2 - \sin(2x))'}{(2 - \sin(2x))^2} = \frac{0 - 1 \times (0 - 2 \cos(2x))}{(2 - \sin(2x))^2} =$$

$$= \frac{-1 \times (-2 \cos(2x))}{(2 - \sin(2x))^2} = \frac{2 \cos(2x)}{(2 - \sin(2x))^2}$$

Determinemos, agora, os zeros de  $g'$  no intervalo dado:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \cos(2x) = 0 \wedge (2 - \sin(2x))^2 \neq 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = 0 \wedge \underbrace{2 \neq \sin(2x)}_{\text{condição universal}}$$




$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Se  $k = 0$ , então  $x = \frac{\pi}{4}$ ;

Se  $k = 1$ , então  $x = \frac{3\pi}{4}$ .

Para os restantes valores de  $k$ ,  $x$  não pertence ao intervalo pretendido.

Estudando a variação do sinal da função derivada e relacionando-o com a monotonia da função, vem:

$x$	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		$\pi$
$g'(x)$		+	0	-	0	+	+
$g(x)$			Máx		Mín		Máx

Podemos concluir que:

- o gráfico da função  $g$  é crescente em  $]0, \frac{\pi}{4}]$  e em  $[\frac{3\pi}{4}, \pi]$  e decrescente em  $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ .
- o mínimo relativo é,  $g\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{2 - \sin\left(2 \times \frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{1}{2 - \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)} = \frac{1}{2 - (-1)} = \frac{1}{3}$ .
- os máximos relativos são,  $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2 - \sin\left(2 \times \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{2 - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{2 - 1} = 1$  e

$$g(\pi) = \frac{1}{2 - \sin(2 \times \pi)} = \frac{1}{2 - 0} = \frac{1}{2}.$$

13.

Como a função  $f$  é contínua em  $]0, \pi[$  a eventual existência de assíntotas verticais ao gráfico de  $f$  será nos pontos  $0$  e  $\pi$  que são pontos aderentes ao domínio de  $f$  e não lhe pertencem.

Vejamos:

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = \frac{0}{0}$  (indeterminação)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\frac{\operatorname{sen} x}{x}} = \frac{1}{\underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{\text{limite notável}}} = \frac{1}{1} = 1, \text{ pelo que } x=0 \text{ não é assíntota ao}$$

gráfico de  $f$ .

- $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi} = \frac{\pi}{0^+} = +\infty$ , logo,  $x = \pi$  é assíntota vertical do gráfico de  $f$ .

A resposta correta é a opção ( B ).

14.

As coordenadas do ponto  $P$  e as coordenadas do ponto  $Q$  são, respetivamente,  $P\left(a, \frac{\ln a}{a}\right)$  e  $Q\left(2a, \frac{\ln(2a)}{2a}\right)$ .

Logo, o declive da reta  $PQ$  é:

$$m = \frac{\frac{\ln(2a)}{2a} - \frac{\ln a}{a}}{2a - a} = \frac{\frac{\ln(2a) - 2\ln a}{2a}}{a} = \frac{\ln(2a) - \ln(a^2)}{2a^2} = \frac{\ln\left(\frac{2a}{a^2}\right)}{2a^2} = \frac{\ln\left(\frac{2}{a}\right)}{2a^2}.$$

Para que o triângulo retângulo definido pela reta  $PQ$  e pelos eixos coordenados seja isósceles é preciso que o valor absoluto da ordenada na origem da reta  $PQ$  seja igual à abcissa do ponto em que a reta intersecta o eixo  $Ox$ . Assim, o declive da reta nestas condições é igual a 1.

$$\text{Então, } \frac{\ln\left(\frac{2}{a}\right)}{2a^2} = 1 \text{ ou } \frac{\ln\left(\frac{2}{a}\right)}{2a^2} - 1 = 0.$$

Para mostrar que esta equação tem pelo menos uma solução no intervalo  $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$  consideramos a

função  $f$  definida por,  $f(a) = \frac{\ln\left(\frac{2}{a}\right)}{2a^2} - 1$ .

Calculemos  $f\left(\frac{1}{2}\right)$  e  $f(1)$ :

$$\begin{aligned} \bullet f\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{\ln\left(\frac{2}{\frac{1}{2}}\right)}{2\left(\frac{1}{2}\right)^2} - 1 = \frac{\ln(4)}{2 \times \frac{1}{4}} - 1 = \frac{\ln(4)}{\frac{1}{2}} - 1 = 2\ln(4) - \ln(e) = \\ &= \ln(4^2) - \ln(e) = \ln\left(\frac{4^2}{e}\right) > 0, \text{ porque } \frac{4^2}{e} > 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet f(1) &= \frac{\ln\left(\frac{2}{1}\right)}{2(1)^2} - 1 = \frac{\ln(2)}{2} - 1 = \frac{1}{2}\ln(2) - 1 = \ln(\sqrt{2}) - \ln(e) = \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{e}\right) < 0, \\ &\text{porque } \frac{\sqrt{2}}{e} < 1. \end{aligned}$$

Logo, como  $f\left(\frac{1}{2}\right) \times f(1) < 0$  e a função  $f$  é contínua em  $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ , pelo corolário do teorema de Bolzano conclui-se que a função  $f$  tem pelo menos um zero em  $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$ .

Assim, a equação  $\frac{\ln\left(\frac{2}{a}\right)}{2a^2} = 1$  tem pelo menos uma solução no intervalo  $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$ , o que prova a existência de um número real  $a$  pertencente ao intervalo  $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$  para o qual o triângulo referido é isósceles, como queríamos demonstrar.