

**PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA B DO ENSINO  
SECUNDÁRIO  
(CÓDIGO DA PROVA 735) – 1ª FASE – 28 DE JUNHO 2023**

1. Seja  $x$  o número de embalagens de suplemento I e  $y$  o número de embalagens de suplemento II.

A função objetivo, que se pretende minimizar, é  $C(x, y) = 2x + 1,5y$ .

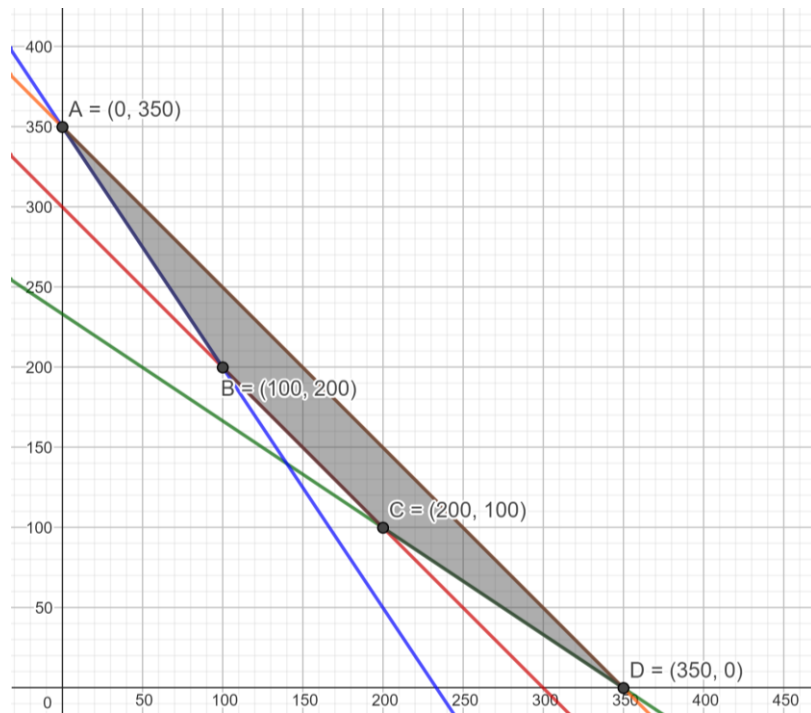
Quanto às restrições, a condição relativa à quantidade de maçã é  $0,4x + 0,6y \geq 140$ ; relativamente à quantidade de amendoim é  $0,5x + 0,5y \geq 150$  e à quantidade de chocolate é  $0,6x + 0,4y \geq 140$ .

Quanto ao total de caixas temos que  $x + y \leq 350$

Tendo em conta as restrições óbvias  $x \geq 0$  e  $y \geq 0$  e as mencionadas anteriormente, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} 0,4x + 0,6y \geq 140 \\ 0,5x + 0,5y \geq 150 \\ 0,6x + 0,4y \geq 140 \\ x + y \leq 350 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -\frac{2x}{3} + \frac{700}{3} \\ y \geq -x + 300 \\ y \geq -1,5x + 350 \\ y \leq -x + 350 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Desta forma, a representação gráfica da região admissível referente ao sistema de restrições é a representada em baixo, em que  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  são os seus vértices.



Calculando o valor da função objetivo nos vértices da região admissível assinalados pelas suas coordenadas, averiguamos a solução ótima:

$$C(0, 350) = 2 \times 0 + 1,5 \times 350 = 525$$

$$C(100, 200) = 2 \times 100 + 1,5 \times 200 = 500$$

$$C(200, 100) = 2 \times 200 + 1,5 \times 100 = 550$$

$$C(350, 0) = 2 \times 350 + 1,5 \times 0 = 700$$

Desta forma, concluímos que o custo mínimo é 500 euros, obtido no ponto *B*.

**Resposta:** para a empresa ter o custo total mínimo deve produzir 100 embalagens de suplemento I e 200 embalagens de suplemento II.

2. Utilizando as capacidades da calculadora editamos duas listas, digamos L1 referente à variável  $x$ , número de maçãs, e L2 referente à variável  $y$ , peso médio das maçãs, com vista à obtenção dos parâmetros da reta de regressão linear da forma  $y = ax + b$ .

L1	L2	L3	L4	L5	2
318	163.87	-----	-----	-----	
661	94.72				
530	106.58				
214	166.75				
360	148.08				
114	212.06				
632	134.91				
483	115.02				
93	226.4				
470	139.72				
-----	-----				

L2(11)=

NORMAL FLOAT AUTO REAL RADIAN MP

**LinReg**

$y=ax+b$   
 $a=-0.1969237426$   
 $b=227.1189503$

Temos assim que a reta de regressão linear, que modela os dados apresentados, tem de equação  $y = -0,197x + 227,119$

Fazendo, neste modelo,  $x = 160$ , obtemos  $y = -0,197 \times 160 + 227,119 = 195,599$

**Resposta:** É de esperar que o peso médio das maçãs seja de 195,6 gramas.

3.

3.1. De acordo com o padrão de apodrecimento das maçãs apresentado, o número de maçãs que apodrecem em cada dia segue a sequência 1, 3, 5, 7, ... correspondente à sucessão dos números ímpares, até ao 12º termo. Ora, nesta sucessão, a diferença entre cada termo e o anterior é sempre constante e igual a 2, pelo que o número de maçãs que apodrecem está em progressão aritmética de razão 2.

3.2. Pelas razões apresentadas em 3.1. o termo geral da sequência é  $2n - 1$ , pelo que o seu 12º termo é:

$$2 \times 12 - 1 = 23.$$

O número total de maçãs que apodrecem é dado por:  $\frac{1+23}{2} \times 12 = 12 \times 12 = 144$

Se 144 maçãs correspondem a 80% das maçãs colhidas, então temos que o total (100%) obedece à relação:

$$\frac{144}{80} = \frac{T}{100} \Leftrightarrow T = \frac{144 \times 100}{80} = 180$$

**Resposta:** Foram colhidas 180 maçãs.

4.

4.1. Estando as maçãs à temperatura de  $25^{\circ}\text{C}$ , temos que fazer, no modelo apresentado,  $T_0 = 25$ .

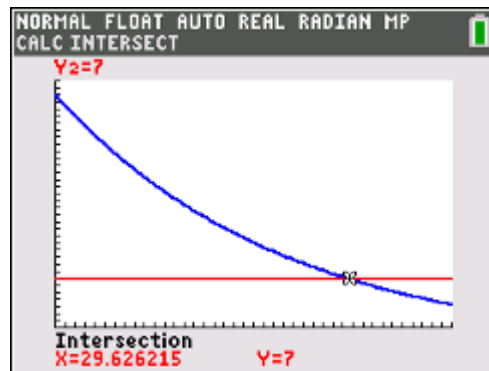
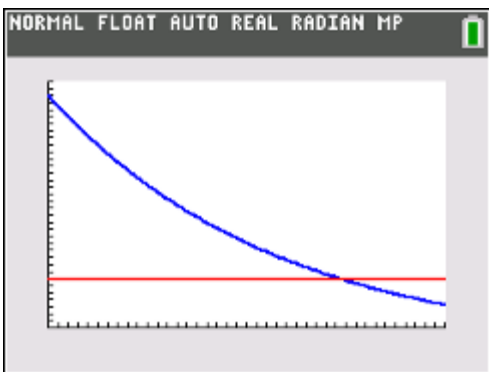
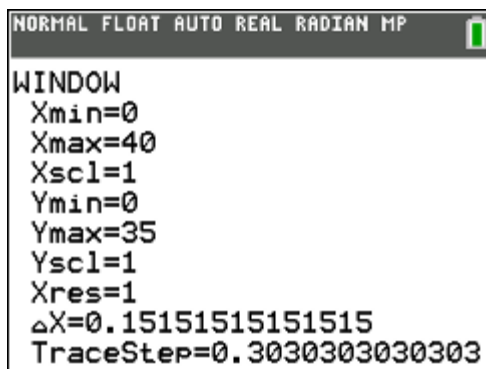
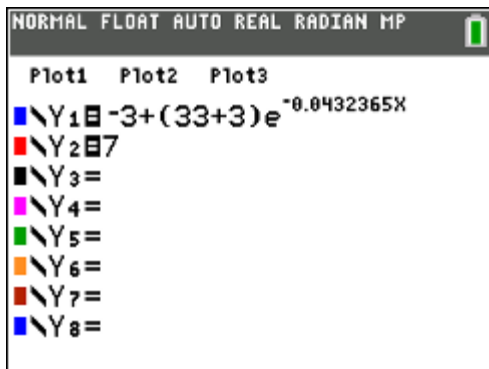
A temperatura após 27 minutos de se iniciar o banho é dada por:

$$T(27) = -3 + (25 + 3)e^{-0,0432365 \times 27} = -3 + 28e^{-1,1673855} \approx 5,713$$

**Resposta:** Como  $5,713 < 7$ , as maçãs estão em condições de ser armazenadas.

4.2.1. Neste caso temos que  $T_0 = 33$  e há que encontrar as soluções da inequação  $T(x) < 7$

Podemos encontrar essas soluções recorrendo às capacidades da calculadora gráfica:



A curva correspondente ao gráfico da função  $T$ , que é decrescente, interseca a reta de equação  $y = 7$  no ponto de abcissa  $x \approx 29,626$ .

**Resposta:** A duração mínima do banho de arrefecimento, nesta situação, é de 30 minutos.

4.2.2. Como  $V$  é a função que dá a taxa de variação instantânea de  $T$ , então  $V(16) \approx -0,78$ , significa que, estando as maçãs a uma temperatura inicial de  $33^\circ\text{C}$ , no 16º minuto de banho de arrefecimento, a temperatura das maçãs está a baixar a uma taxa de, aproximadamente,  $0,78^\circ\text{C}$  por minuto.

5.

Podemos resolver este item, usando a informação que consta no formulário relativamente à distribuição normal.

De  $\mu = 60$  e  $\sigma = 5$ , resulta que  $55 = \mu - \sigma$

Como, de acordo com a distribuição normal com estes parâmetros,

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0,6827$$

Temos:

$$P(55 < X < 65) = 0,6827$$

E também temos que:

$$P(55 < X < 60) = \frac{0,6827}{2}$$

$$\Leftrightarrow P(55 < X < 60) = 0,34135$$

Logo,

$$P(X > 55) = P(55 < X < 60) + P(X > 60)$$

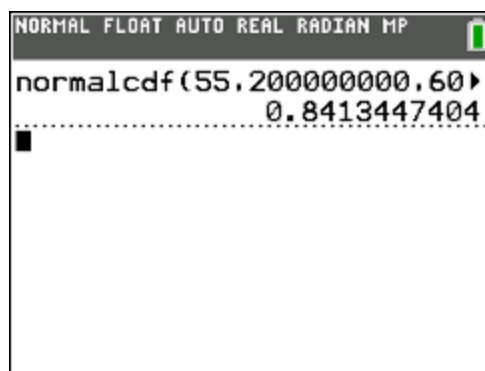
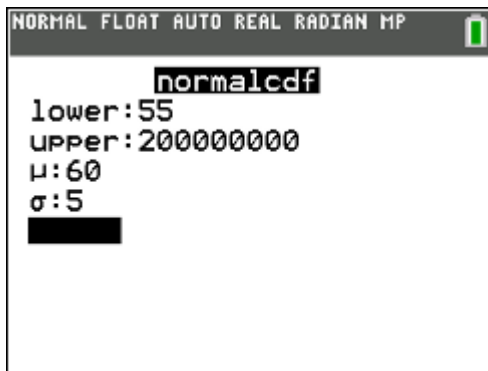
$$\Leftrightarrow P(X > 55) = 0,34135 + 0,5$$

$$\Leftrightarrow P(X > 55) = 0,84135$$

Como foram colhidas 50000 maçãs, vem que:

$$0,84135 \times 50000 = 42067,5$$

Em alternativa, também podíamos recorrer à calculadora para obter o valor de  $P(X > 55)$ :



**Resposta:** É esperado serem comercializados 42 milhares de maçã bravo-de-esmolfe.

6.

Este item pode ser resolvido por pelo menos dois processos:

**1º processo:**

O número de horas sol no dia 1 de janeiro é dado por:

$$S(1) = 12,1237 + 2,8720 \sin(0,0168 \times 1 - 1,3255)$$

$$\Leftrightarrow S(1) \approx 9,34978$$

Determinemos os minutos de sol para além das 9 horas:  $0,34978 \times 60 \approx 20,9867$

No dia 1 de janeiro houve, então, aproximadamente, 9h 21min de sol.

Como o nascer do sol se deu às 7h 56min temos, assim,  $7h 56min + 9h 21min = 17h 17min$ , pelo que, nesse dia o pôr do sol foi às 17h 17min

Ora,  $17h 17min - 15h = 2h 17min$

Como o Sr. Silva esteve no pomar desde as 15 horas até ao pôr do sol, então esteve no pomar, aproximadamente, 2horas e 17 minutos.

**2º processo:**

O nascer do sol deu-se às 7h 56min.

Ora,  $15h - 7h 56min = 7h 4min$

O Sr. Silva **não esteve** no pomar durante 7 horas e 4 minutos de sol.

Como já vimos, temos que:

$$S(1) \approx 9h 21min \text{ e } 9h 21min - 7h 4min = 2h 17min$$

**Resposta:** O Sr. Silva esteve no pomar, aproximadamente, 2horas e 17 minutos.

7.

Começemos por determinar o peso médio das maçãs, em gramas.

$$\bar{x} = \frac{181 + 185 + 188 + 190 + 192}{5} \Leftrightarrow \bar{x} = 187,2$$

Basta agora determinar, no modelo apresentado, o valor de  $P(187,2)$ :

$$P(187,2) = 1,059 \ln(187,2) - 3,2553$$

$$\Leftrightarrow P(187,2) \approx 2,28558$$

**Resposta:** O preço por quilograma das maçãs que a avó Maria comprou foi de aproximadamente 2,29€.

8.

O gráfico A não pode representar a função  $h$  porque, no início da contagem de tempo, não havia água no depósito, pelo que o gráfico devia conter necessariamente a origem do referencial.

Para além disso, notemos que à medida que o depósito vai enchendo a altura da água vai subindo, pelo que a função  $h$  será uma função crescente, que não corresponde ao gráfico A.

O gráfico B não pode representar a função  $h$  porque a torneira tem um caudal constante e à medida que o depósito vai enchendo, o diâmetro da superfície da água permanece constante, pelo que a função  $h$  será uma função de proporcionalidade direta, sendo o seu gráfico parte de uma semirreta com origem na origem do referencial.

9.

9.1. A capacidade da forma do bolo, que é um tronco de cone, será dada pela diferença de volume dos dois cones representados esquematicamente na figura 6. A capacidade é pedida em litros.

Como  $1l = 1dm^3$ , vamos já utilizar as medidas em  $dm$ .

As dimensões do cone de diâmetro  $[AB]$  são:

- Raio =  $1,1dm$
- Altura =  $5,5dm$

Os dois cones, de diâmetro  $[AB]$  e de diâmetro  $[CD]$ , são semelhantes, pelo que se verifica que:

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \frac{4,5}{5,5} \Leftrightarrow \overline{CD} = \frac{2,2 \times 4,5}{5,5} \Leftrightarrow \overline{CD} = 1,8$$

As dimensões do cone de diâmetro  $[CD]$  são, então:

- Raio =  $0,9dm$
- Altura =  $4,5dm$

Volume do cone de diâmetro  $[AB]$ :

$$V_1 = \frac{1,1^2 \times \pi}{3} \times 5,5 \Leftrightarrow V_1 \approx 6,9691$$

Volume do cone de diâmetro  $[CD]$ :

$$V_2 = \frac{0,9^2 \times \pi}{3} \times 4,5 \Leftrightarrow V_2 \approx 3,81704$$

O volume do tronco de cone corresponde à diferença dos dois volumes que acabamos de determinar:

$$V_T = V_1 - V_2 \approx 6,9691 - 3,81704 \approx 3,15206 \text{ dm}^3$$

**Resposta:** A forma tem uma capacidade de, aproximadamente, 3 litros.

9.2. As coordenadas dos pontos  $V$  e  $M$ , são do tipo  $(5, y, 4)$ .

Como  $y_M = 21$ , as coordenadas do ponto  $M$ , são  $(5, 21, 4)$ .

Notemos que o comprimento  $\overline{VM} = 55$  porque corresponde à altura, em cm, do cone de diâmetro  $[AB]$ .

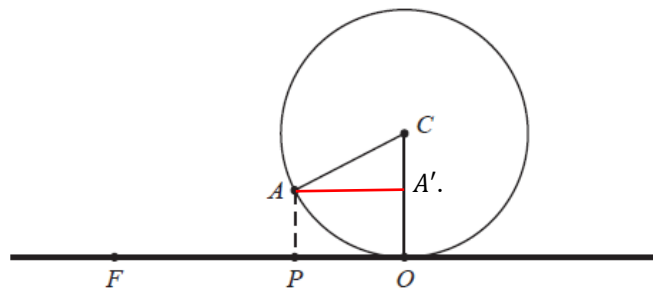
Assim, temos de ter:

$$\begin{aligned} y_M - y_V &= 55 \\ \Leftrightarrow 21 - 55 &= y_V \\ \Leftrightarrow -34 &= y_V \end{aligned}$$

**Resposta:** As coordenadas do ponto  $V$ , são  $(5, -34, 4)$ .

10.

A distância  $\overline{FP}$  é dada pela diferença entre  $\overline{FO}$  e  $\overline{PO}$ . Temos que  $\overline{PO} = \overline{AA'}$  sendo que o triângulo  $[ACA']$  é retângulo em  $A'$ .



Começemos por determinar o ângulo  $\alpha = \widehat{ACO}$  que é o ângulo ao centro correspondente ao arco  $AO$  que mede 3,77 cm.

O raio da circunferência é  $\overline{AC} = \frac{7,2}{2} = 3,6$

Temos então, em radianos, que:

$$\begin{aligned} 3,77 &= \alpha \times 3,6 \Leftrightarrow \alpha = \frac{3,77}{3,6} \\ \Leftrightarrow \alpha &\approx 1,03 \text{ rad} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Sendo assim, vem: } \sin \alpha &= \frac{\overline{AA'}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \overline{AA'} = \overline{AC} \times \sin \alpha \\ \overline{AA'} &= 3,6 \times \sin 1,03 \approx 3,09 \end{aligned}$$

Concluimos então que  $\overline{OP} \approx 3,09$

Logo  $\overline{FP} = \overline{FO} - \overline{PO} = 40 - 3,09 \approx 37$

**Resposta:** A formiga encontra-se a 37 cm do formigueiro.